ENITRTS STRASBOURG 1980 Option Ph. Mth.

I (3 heures)

Dans tout ce problème, $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ désignent des complexes <u>distincts</u>. On leur associe le polynôme $\pi(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_p)$. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $\pi_i(x)$ est le polynôme $\pi(x)/(x-\lambda_i)$.

I

$\mathcal{E}$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à p-1.

1°) Montrer que les polynômes π_i forment une base de $\mathcal{E}$.

2°) Montrer qu'il existe des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_p$ telles que l'on ait l'identité :

$$c_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)\ldots(x-\lambda_p) + c_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)\ldots(x-\lambda_p) + c_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_4)\ldots(x-\lambda_p) + \ldots\ldots + c_p(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_{p-1}) = 1$$

3°) a) Quelle est la base duale de celle formée par les π_i ?

b) Expliciter les coefficients c_i.

II

On considère les endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. On choisit une base $\mathcal{B}$ de E. A tout endomorphisme u de E sera associée sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$. I désignera tant l'endomorphisme identité que la matrice unité d'ordre n.

Pour tout polynôme $P(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_o$ de $\mathbb{C}[x]$ et pour tout endomorphisme u, on note P(u) l'endomorphisme :

$P(u) = a_r u^r + a_{r-1}u^{r-1} + \ldots + a_1 u + a_o I$

et P(A) la matrice $P(A) = a_r A^r + \ldots + a_1 A + a_o I$.

1°) Montrer que si $X \in E$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ, il est vecteur propre de P(A). Quelle est la valeur propre associée ?

2°) Si u est diagonalisable avec pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, montrer que $\pi(u) = 0$ pour $\pi(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_p)$.

3°) On suppose inversement que u est un endomorphisme vérifiant $\pi(u) = 0$; montrer, en utilisant le résultat de la question I.2°) que E est la somme des sous-espaces $\ker(u - \lambda_i I)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

En déduire que u est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres éventuelles ?

4°) On dit que le sous-espace vectoriel F de E est stable par u si l'on a : $X \in F \Longrightarrow u(X) \in F$; alors la restriction u_F de u à F est un endomorphisme de F.

Montrer, dans ces conditions, que si u est diagonalisable dans E, u_F est diagonalisable dans F.

5°) Soient A et B deux matrices diagonalisables telles que A.B = B.A . Montrer que les sous-espaces propres de A sont stables par B. En déduire l'existence d'une base de E constituée de [illegible]

III

On dit qu'une matrice A est nilpotente s'il existe un entier m tel que l'on ait $A^m = 0$.

1°) Montrer que si A est nilpotente, toute matrice semblable est nilpotente.

2°) Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

3°) Soient A, B deux matrices nilpotentes telles que A.B = B.A ; montrer que si $A^q = 0$ et $B^r = 0$, on a : $(A - B)^m = 0$ pour $m = q + r - 1$. Donner un exemple de deux matrices d'ordre 2 nilpotentes dont la différence n'est pas nilpotente.

IV

On envisage désormais des matrices arbitraires, non nécessairement diagonalisables ou nilpotentes.

Soit $\mu(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\ldots(x-\lambda_p)^{m_p}$ un polynôme dont les racines distinctes sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. On utilisera à nouveau les polynômes $\pi(x)$ et $\pi_i(x)$ et on notera pour $1 \leqslant i \leqslant p$:

$\mu_i(x)$ le polynôme $\mu(x)/(x-\lambda_i)^{m_i}$ et $\nu_i(x)$ le polynôme $\mu_i(x)/\pi_i(x)$.

1°) Montrer qu'il existe pour tout i un polynôme $Q_i(x)$ nul ou de degré $\leqslant m_i - 2$ tel que le polynôme $1 - \mu_i(x)Q_i(x)$ soit divisible par $(x-\lambda_i)^{m_i-1}$ (on pourra par exemple considérer la division de 1 par μ_i suivant les puissances croissantes de $y = x-\lambda_i$). Montrer qu'alors le polynôme $P_\mu(x) = \pi(x)\left[\nu_1(x).Q_1(x) + \ldots + \nu_p(x).Q_p(x)\right]$ a les propriétés suivantes :

a) Si $m = \max(m_1, \ldots, m_p)$, $(P_\mu(x))^m$ est divisible par $\mu(x)$.

b) le polynôme composé $\pi(x-P_\mu(x))$ est divisible par $\mu(x)$.

2°) Soit A une matrice telle que $\mu(A) = 0$. Montrer que $P_\mu(A) = N$ est une matrice nilpotente et que $S = A - N$ est diagonalisable et a pour valeurs propres celles de A. Montrer en outre que S.N = N.S.

3°) On suppose que $A = S_1 + N_1$ est une autre décomposition en une matrice S_1 diagonalisable et une matrice N_1 nilpotente telle que $S_1.N_1 = N_1.S_1$; montrer que $S.S_1 = S_1.S$ et que $N.N_1 = N_1.N$. En déduire en utilisant III 2°) que $S - S_1 = N_1 - N = 0$

4°) On donne :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on admet qu'on peut prendre pour $\mu(x)$ le polynôme caractéristique. Calculer $P_\mu(x)$ et les composantes N et S de A. Vérifier que S.N = N.S ; en déduire pour m entier une expression simple de A^m en fonction de S, N et m.

1961

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail